Algèbre 5 - Applications linéaires

1 Généralités

Définition (Application linéaire (abréviation AL)). *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.*
*Une application $\varphi : E \to F$ est dite **linéaire** si "l'image d'une CL est la CL des images", c-à-d si :*

$$\forall x, y \in E\,,\ et\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\,,\quad \boxed{\varphi(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.\varphi(x) + \mu.\varphi(y)}$$

L'ensemble des AL de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Remarque : Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\boxed{\varphi(0_E) = 0_F}$. En effet, $\varphi(0_E) = \varphi(0.0_E) = 0.\varphi(0_E) = 0_F$.
Exemples :

- La dérivation sur les fonctions $\mathcal{C}^1$: $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{pmatrix}$ car $(\lambda.f + \mu.g)' = \lambda.f' + \mu.g'$.
- La dérivation sur les polynômes : $\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{pmatrix}$
- L'intégration entre a et b : $\varphi : \begin{pmatrix} \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f \end{pmatrix}$ car $\int_a^b(\lambda.f + \mu.g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

Théorème/définition. *Soit $p, n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application de multiplication à gauche par A d'une colonne de $\mathbb{K}^p$:*

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & A.x \end{pmatrix}$$

*est linéaire. Elle est appelée **AL canoniquement associée à** A.*

Démonstration. Pour tous $x, y \in \mathbb{K}^p$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

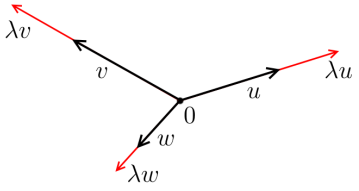
$$\varphi_A(\lambda.x + \mu.y) = A.(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.Ax + \mu.Ay = \lambda.\varphi_A(x) + \mu.\varphi_A(y)$$

□

Cf exo 1

Vocabulaire.

- *Une AL $\varphi : E \to E$ est appelée un **endomorphisme** de E.*
  L'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ des endomorphismes de E est simplement noté $\boldsymbol{\mathcal{L}(E)}$.
- *La fonction **identité** est l'application $Id_{\boldsymbol{E}}$: $\begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$. Il s'agit d'un endomorphisme de E.*
- *L'**homothétie** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ est l'endomorphisme $\begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda.x \end{matrix}$, c-à-d $\lambda.Id_E$.*



Propriétés 1 (CL et composées d'AL). *Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev.*

1. *$\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev (c'est un sev de $\mathcal{F}(E, F)$), une CL d'AL est une AL.*
2. *La composée de deux AL est une AL.*
3. *Si $u, u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v, v_1, v_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on a les propriétés de distributivité à gauche et à droite :*

$$\begin{cases} v \circ (\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2) = \lambda_1.v \circ u_1 + \lambda_2.v \circ u_2 \\ (\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2) \circ u = \lambda_1.v_1 \circ u + \lambda_2.v_2 \circ u \end{cases}$$

Exemple : si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $u^5 - 3u^3 + 2u \circ v - 5\mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

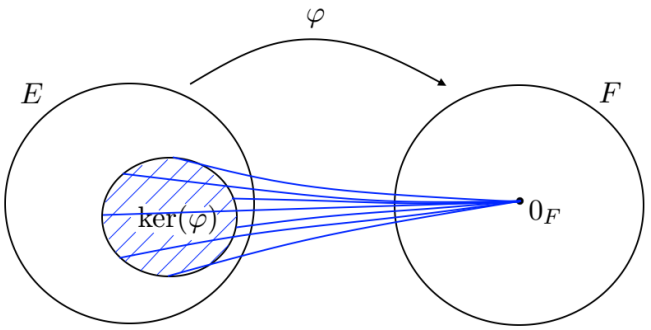
2 Noyau et image d'une AL

Fixons E, F des $\mathbb{K}$-ev et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$.

Théorème/définition 2 (Noyau d'une AL)**.**
Le noyau *de φ est l'ensemble des $x \in E$ tq $\varphi(x) = 0$.*

$$\ker(\varphi) \;=\; \{x \in E \mid \varphi(x) = 0_F\}$$

Il s'agit d'un sev de E.



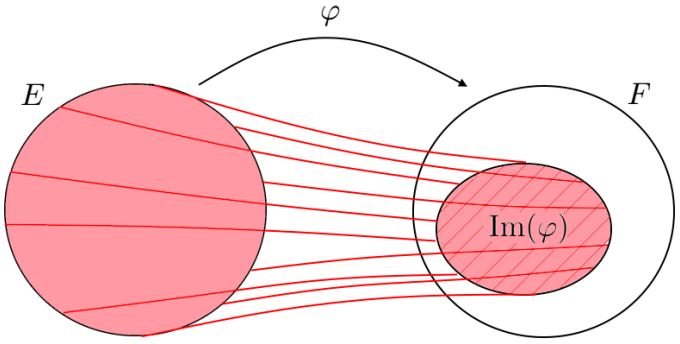
Cf exo 2,3

Théorème 3 (Caractérisation de l'injectivité)**.**
On a l'équivalence : $\boxed{\varphi \text{ est injective} \iff \ker(\varphi) = \{0_E\}}$

Théorème/définition 4 (Image d'une AL)**.**
L'image *de φ est l'ensemble des $y \in F$ qui sont l'image par φ d'un élément de E.*

$$\mathrm{Im}(\varphi) \;=\; \{y \in F \;\mid\; \exists x \in E \;\; tq \;\; y = \varphi(x)\} \;=\; \varphi(E)$$

Il s'agit d'un sev de F.



Corollaire 5 (Image directe d'un sev par une AL)**.**
Soit H un sev de E. Alors l'image directe de H par φ :

$$\varphi(H) \;=\; \{\varphi(x) \mid x \in H\} \;=\; \{y \in F \;\mid\; \exists x \in H \;\; tq \;\; y = \varphi(x)\} \qquad \textbf{\textit{est un sev de } } F.$$

Remarque 6. *Si H est un sev de l'espace d'arrivée F, alors son* ***image réciproque par φ****, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(H) := \{x \in E \;\mid\; \varphi(x) \in H\}$,* ***est un sev de E.***

Remarque. *On a l'équivalence :* $\boxed{\varphi \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(\varphi) = F}$
En effet, par définition, $\mathrm{Im}(\varphi)$ *est l'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par φ. Donc (φ surjective) signifie exactement* $(\mathrm{Im}(\varphi) = F)$.

Définition. *On dit qu'une AL $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est un* ***isomorphisme*** *lorsqu'elle est* ***bijective****.*

Théorème 7 (Famille génératrice de l'image).
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathit{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

Conséquence : $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant n$ c'est-à-dire $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leqslant \dim(E)$.
En effet, n vecteurs engendrent un sev de dimension au plus n.

Lemme 8. *Supposons que φ est **injective**.*

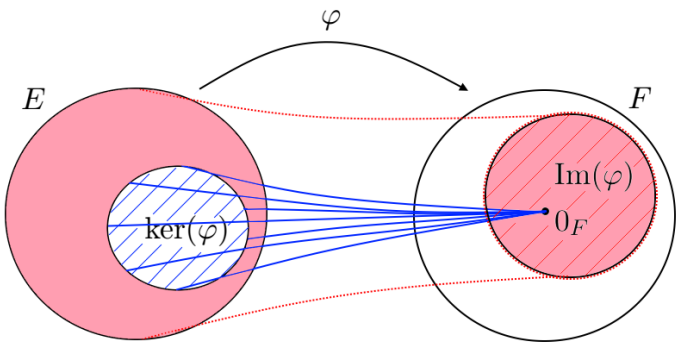
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, alors $\big(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\big)$ est une famille libre de F.

Lemme 9. *Si φ est **injective** et si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(E)$$

Théorème 10 (THEOREME DU RANG).
Si E est de dimension finie, alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ *est de dimension finie (sa dimension s'appelle le **rang** de φ), et on a l'égalité :*

$$\dim(\ker \varphi) \ + \ \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) \ = \ \dim(E)$$



Cf exo 4

3 Rang d'une AL

Définition. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Lorsque le sev* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *est de dimension finie, on dit que φ est de rang fini, et son **rang** est défini par*

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) \ = \ \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) \ = \ \dim(\varphi(E))}$$

Rappel : lorsque E est de dimension $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)}_{\text{famille } \mathcal{F}}\big)$$

Donc le **rang de** φ n'est autre que le **rang de la famille** $\mathcal{F}$ (au sens rang d'une famille de vecteurs).

Remarque. *Lorsque E est de dimension finie, le théorème du rang peut donc s'écrire :*

$$\dim(\ker \varphi) + \mathrm{rg}(\varphi) \ = \ \dim(E)$$

Propriétés 11. *On suppose que E, F et G sont des ev de dimension finie, et* $\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E, F) \\ v \in \mathcal{L}(F, G) \end{array} \right.$

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

On a :

1. $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(F)$
2. $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$ *avec égalité **ssi** u est injective.*
3. *Plus généralement, si H est un sev de E,* $\dim(u(H)) \leqslant \dim(H)$, *et il y a égalité si u est injective.*
4. $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$
5. *Le rang est invariant par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme :*
   - *Si u est un isomorphisme, alors* $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.
   - *Si v est un isomorphisme, alors* $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$.

4 Isomorphismes

Définitions.

- *Une AL $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ est un **isomorphisme** si elle est **bijective**.*
- *Dans le cas où $E = F$, on parle d'**automorphisme** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$ (GL pour "groupe linéaire").*

Propriétés 12.

1. *La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.*
2. *Si φ est un isomorphisme de E dans F, alors sa bijection réciproque φ^{-1} est un isomorphisme de F dans E.*

Propriété 13. *Si $\varphi \in GL(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^k \in GL(E)$ et $(\varphi^k)^{-1} = (\varphi^{-1})^k$.*

Notation. *Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in GL(E)$, l'automorphisme $(\varphi^k)^{-1}$ est noté φ^{-k}.*

Vocabulaire. *Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille de vecteurs de E, l'**image de $\mathcal{F}$ par** φ est la famille de vecteurs de F : $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p))$.*

Théorème 14 (Action d'un isomorphisme sur les bases)**.**
On suppose E et F de dimension finie. Si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, alors les trois phrases suivantes sont équivalentes :

1. *φ est un isomorphisme.*
2. *L'image de toute base de E par φ est une base de F.*
3. *L'image d'**UNE** base de E par φ est une base de F.*

Vocabulaire. *S'il **existe** un isomorphisme entre E et F, on dit que ces deux ev sont **isomorphes**.*

Corollaire 15. *Si E et F sont isomorphes, alors ils ont même dimension.*
Plus précisément, si l'un d'eux est de dimension finie, alors l'autre aussi, et $\dim(E) = \dim(F)$.

Remarque. *Dans la démonstration du théorème du rang, on a en fait montré que si H est un supplémentaire de $\ker(\varphi)$ dans E, alors H est isomorphe à $\mathrm{Im}(\varphi)$. En effet, on a montré que l'application*

$$\tilde{\varphi} : \begin{pmatrix} H & \to & \mathrm{Im}(\varphi) \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme. Ce fait est appelé la "forme géométrique du théorème du rang". Elle montre bien le théorème du rang puisque si E est de dimension finie, H l'est aussi, et donc par isomorphisme, $\mathrm{Im}(\varphi)$ aussi et

$$\dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim(H) = \dim(E) - \dim(\ker\ \varphi)$$

Théorème 16. *Si E et F sont **de même dimension** $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :*

- *Si φ est injective, elle est aussi surjective (et c'est donc un isomorphisme).*
- *Si φ est surjective, elle est aussi injective (et c'est donc un isomorphisme).*

Remarque : En combinant ce théorème avec le fait que l'injectivité est caractérisée par $\ker(\varphi) = \{0_E\}$, on comprend que lorsque l'on sait que $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer que $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ pour conclure qu'il s'agit d'un isomorphisme.

→ TRES utile en pratique !
Cf exo 5, Q 1,2

Corollaire 17 (Inversibilité à gauche / à droite d'un endomorphisme en dimension finie)**.**
Soit E est un ev de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$, alors u est un automorphisme, et $u^{-1} = v$.

2) S'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = Id_E$, alors u est un automorphisme, et $u^{-1} = v$.

5 Equations linéaires

Définition. *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev.*
*Une **équation linéaire** est une équation (sur $x \in E$) du type*

$$\boxed{\varphi(x) = b} \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{L}(E,F) \text{ est une AL} \\ b \text{ est un vecteur de } F \end{array} \right.$$

*L'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée **équation homogène** associée. Par définition, les solutions de l'éq. homogène sont les vecteurs de* $\ker(\varphi)$.

Théorème. *Dans le contexte précédent, si l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{x \in E \mid \varphi(x) = b\}$ est non vide, et si $x_p \in E$ est une solution particulière (c-à-d vérifie $\varphi(x_p) = b$), alors on a*

$$\mathcal{S} \;=\; \{x_p + x_0 \;\mid\; x_0 \in \ker(\varphi)\}$$

Autrement dit, $\forall x \in E$, on a l'équivalence

$$(x \text{ solution}) \iff (\ x \text{ est de la forme } x = \underbrace{x_p}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{x_0}_{\text{sol. éq. hom.}} \quad \text{où } x_0 \in \ker(\varphi)\ )$$

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on a les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathcal{S} & \iff & \varphi(x) = b \\ & \iff & \varphi(x) = \varphi(x_p) \\ & \iff & \varphi(x - x_p) = 0 \\ & \iff & (x - x_p) \in \ker(\varphi) \\ & \iff & \exists x_0 \in \ker(\varphi) \ \text{ tq } \ x - x_p = x_0 \\ & \iff & \exists x_0 \in \ker(\varphi) \ \text{ tq } \ x = x_p + x_0 \end{array}$$

□

Exemples :

- **EDL d'ordre 1 :** $\boxed{y' + a(t)y = f(t)}$ sur un intervalle I.
  Il s'agit d'une éq. linéaire $\varphi(y) = b$ où : $\left| \begin{array}{l} E = \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \\ F = \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ b \text{ est la fonction } f \\ \varphi \,:\, y \mapsto (y' + a.y) \end{array} \right.$

  $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.

- **Système linéaire :** $\boxed{AX = B}$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$.
  Il s'agit d'une éq. linéaire $\varphi(X) = b$ où : $\left| \begin{array}{l} E = \mathbb{K}^p \\ F = \mathbb{K}^n \\ b \text{ est le vecteur } B \\ \varphi \,:\, X \mapsto AX \end{array} \right.$

  $\ker(\varphi)$ est l'ensemble des $X \in \mathbb{K}^p$ tq $AX = 0$ (noyau de A).

Cf exo 6, Q 1,2

6 Modes de définition d'une AL

Dans cette partie, E et F désignent des $\mathbb{K}$-ev.

Théorème 18 (Caractérisation par les bases)**.** *Une AL est entièrement déterminée par l'image d'une base.*
Autrement dit : si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors si l'on fixe un n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$ de vecteurs de F, il existe une unique AL $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = y_i$.

On peut donc définir φ de cette façon : $\varphi : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ e_1 & \mapsto & y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ e_n & \mapsto & y_n \end{pmatrix}$

Rappel (restriction d'une application) : Si $f : E \to F$ est une application et A une partie de E, la restriction de f à A, notée $f|_A$, est l'application

$$f|_A : \begin{matrix} A & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{matrix}$$

Théorème 19 (Caractérisation par la restriction à 2 sev supplémentaires)**.** *Soit E_1 et E_2 deux sev de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.*
Si $\varphi_1 : E_1 \to F$ et $\varphi_2 : E_2 \to F$ sont deux AL, alors il existe une unique AL $\varphi : E \to F$ qui coïncide avec φ_1 sur E_1 et avec φ_2 sur E_2 (c-à-d tq $\varphi|_{E_1} = \varphi_1$ et $\varphi|_{E_2} = \varphi_2$).

On peut donc définir une AL φ séparément sur E_1 et sur E_2.

7 Projecteurs et symétries

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev (pas forcément de dimension finie).

7.1 Projecteurs

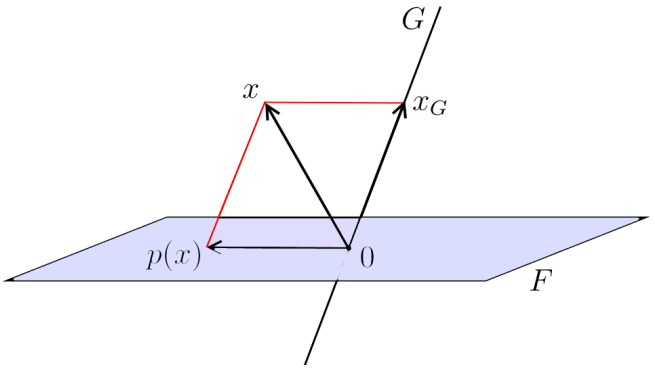
Théorème/définition 20. *On considère deux sev F et G supplémentaires dans E ($E = F \oplus G$).*
*On dit que $p : E \to E$ est le **projecteur** (ou la projection) **sur F, parallèlement à G** si :*

$$p|_F = Id_F \qquad \text{et} \qquad p|_G = 0$$

Autrement dit, lorsqu'un élément $x \in E$ s'écrit $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$, on a $\boxed{p(x) = x_F}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} p^2 = p \\ \ker(p) = G \\ \mathrm{Im}(p) = F = \ker(p - Id_E) \end{array}$$



Remarques : par définition, $\ker(p - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des $x \in E$ tq $p(x) - x = 0$, c-à-d $p(x) = x$. Il s'agit donc de l'ensemble des **points fixes** de p.

Théorème 21 (Caractérisation des projecteurs)**.** *Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, on a l'équivalence suivante :*

$$\varphi \text{ est un projecteur} \iff \varphi^2 = \varphi$$

et alors φ est le projecteur sur $F := \mathrm{Im}(\varphi) = \ker(\varphi - Id_E)$, parallèlement à $G := \ker(\varphi)$.

Cf exo 8

7.2 Symétries

Théorème/définition 22 (Symétries). *On considère deux sev F et G supplémentaires dans E (c'est-à-dire $E = F \oplus G$).*
*On dit que $s : E \to E$ est la **symétrie par rapport à F, parallèlement à G** si :*

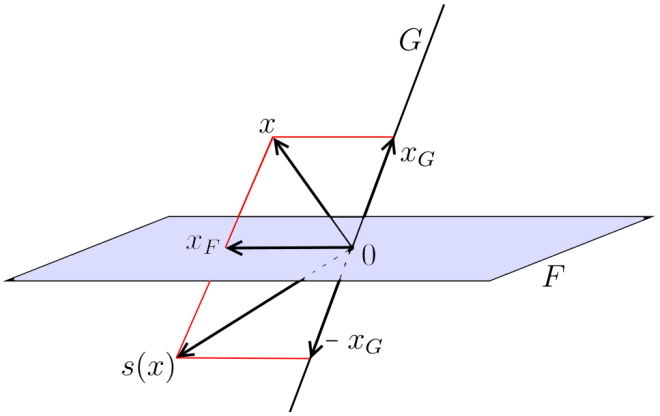
$$s|_F = Id_F \qquad et \qquad s|_G = -Id_G$$

Autrement dit : si $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$, on a $\boxed{s(x) = x_F - x_G}$.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} s^2 = Id_E \\ F = \ker(s - Id_E) \\ G = \ker(s + Id_E) \end{array}}$$

La relation $s^2 = Id_E$ implique au passage que s est un automorphisme, et que $s^{-1} = s$.



Remarques :

— Par définition, $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des $x \in E$ tq $s(x) - x = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(x) = x}$.

— De même, $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des $x \in E$ tq $s(x) + x = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(x) = -x}$.

Théorème 23 (Caractérisation des symétries). *Si $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, on a l'équivalence suivante :*

$$\varphi \text{ est une symétrie} \iff \varphi^2 = Id_E$$

et alors φ est la symétrie par rapport à $F := \ker(\varphi - Id_E)$, parallèlement à $G := \ker(\varphi + Id_E)$.

Cf exo 9,10

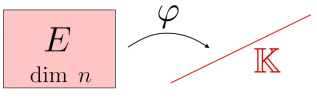
8 Hyperplans et formes linéaires

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

Définition. *On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.*

Propriété 24. *Soit H un hyperplan de E. Si D est une droite vectorielle non incluse dans H, alors on a $H \oplus D = E$, autrement dit H et D sont supplémentaires dans E.*

Vocabulaire. *Une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire**.*



Propriété 25. *Un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si, et seulement si, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Propriété 26. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Une partie H de E est un hyperplan, si et seulement s'il existe une famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires non tous nuls telle que*

$$\forall x \in E, \qquad (x \in H \iff \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0)\,,$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne la liste des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.
*La relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ est appelée **équation de H dans la base $\mathcal{B}$.***

Applications linéaires : démonstrations des théorèmes du cours

---

dem des propriétés 1 : Simples vérifications.

---

dem du théorème 2 : mq $\ker(\varphi)$ est un sev de E.
Tout d'abord, $0_E \in \ker(\varphi)$ car $\varphi(0_E) = 0_F$.
Vérifions la stabilité par CL : Soit $x_1, x_2 \in \ker(\varphi)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Par linéarité, on a :

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \;=\; \lambda_1 \underbrace{\varphi(x_1)}_{=0_F} + \lambda_2 \underbrace{\varphi(x_2)}_{=0_F} \;=\; 0_F$$

Cela montre que $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in \ker(\varphi)$. ok

---

dem du théorème 3 : Fixons $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Montrons l'implication ($\Rightarrow$). Supposons φ injective. Montrons que $\ker(\varphi) = \{0_E\}$.
  Soit $x \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(x) = 0_F$, donc $\varphi(x) = \varphi(0_E)$. D'où, par injectivité de φ : $x = 0_E$.
  Ce travail montre que $\ker(\varphi) = \{0_E\}$.
- Montrons l'implication ($\Leftarrow$). Supposons $\ker(\varphi) = \{0_E\}$. Mq φ injective. Soit $x, y \in E$. Supposons $\varphi(x) = \varphi(y)$. On a :

  $$\varphi(x) - \varphi(y) = 0_F \quad \text{donc} \quad \varphi(x - y) = 0_F \quad \text{c'est-à-dire} \quad (x - y) \in \ker(\varphi).$$

  Or $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ donc $x - y = 0_E$, et donc $x = y$.
  Ce travail montre que φ est injective.

---

dem du théorème 4 : mq $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sev de F.
0_F appartient à $\mathrm{Im}(\varphi)$ car $0_F = \varphi(0_E)$.
Vérifions la stabilité par CL : Soit $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
Par définition de $\mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $x_1, x_2 \in E$ tq $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_1) \\ y_2 = \varphi(x_2) \end{array} \right.$.
Donc :

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \;=\; \lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) \;=\; \varphi(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}_{\in E})$$

Cela montre que $(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \in \mathrm{Im}(\varphi)$. ok

---

dem du corollaire 5 : l'ensemble $\varphi(H)$ peut être vu comme l'image, non pas de φ, mais de la restriction de φ à H, c'est-à-dire l'application :

$$\tilde{\varphi} : \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{H} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array} \right)$$

On a clairement $\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}) = \varphi(H)$. Or, $\tilde{\varphi}$ est tout aussi linéaire que φ, donc d'après le théorème précédent, son image est un sev de F. Donc $\varphi(H)$ est un sev de F.

---

dem de la remarque 6 : Montrons que $\varphi^{-1}(H)$ est un sev de E :
- $\varphi(0_E) = 0_F \in H$ donc $0_E \in \varphi^{-1}(H)$.
- Soient $x, y \in \varphi^{-1}(H)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha x + \beta y \in \varphi^{-1}(H)$:

Par linéarité de φ, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ or $\varphi(x) \in H$ et $\varphi(y) \in H$ donc $\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \in H$ par stabilité de H par CL.
Ainsi $\varphi(\alpha x + \beta y) \in H$ donc $\alpha x + \beta y \in \varphi^{-1}(H)$.

---

dem du théorème 7 :

- Montrons $\text{Vect}\,(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)) \subset \text{Im}(\varphi)$.
  Chacun des $\varphi(e_i)$ appartient à $\text{Im}(\varphi)$. Or, $\text{Im}(\varphi)$ est un sev, donc il est en particulier stable par CL. Donc toute CL des $\varphi(e_i)$ appartient à $\text{Im}(\varphi)$, ce qui signifie bien $\text{Vect}\,(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n)) \subset \text{Im}(\varphi)$.
- Montrons $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Vect}\,(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$.
  Soit $y \in \text{Im}(\varphi)$. Par définition, $\exists x \in E$ tq $y = \varphi(x)$. Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Donc on a :

$$y = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i). \quad \text{Donc} \quad y \in \text{Vect}\,(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))\,.$$

---

dem du lemme 8 : on suppose φ injective, c-à-d $\ker(\varphi) = \{0_E\}$.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre. Mq $(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$ est libre. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = 0_F$. Par linéarité, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F \quad &\text{donc} \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \in \ker(\varphi) \\
&\text{donc} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \qquad\qquad (\text{car } \ker(\varphi) = \{0_E\}) \\
&\text{donc} \quad \forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ \lambda_i = 0 \qquad (\text{car les } e_i \text{ sont libres}) \quad \underline{\text{ok}}
\end{aligned}$$

---

dem du lemme 9 : soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. D'après les deux théorèmes précédents :

- $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\,(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$
- $(\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_n))$ est libre.

Or, n vecteurs libres engendrent un sev de dimension n. Donc $\dim(\text{Im}(\varphi)) = n$.

---

dem du théorème 10 : Notons $n = \dim(E)$ et $p = \dim(\ker(\varphi))$. Il s'agit donc de mq $\dim(\text{Im}(\varphi)) = n - p$.
Soit H un supplémentaire de $\ker(\varphi)$ dans E (n'importe lequel). On a donc $H \oplus \ker(\varphi) = E$, et H est nécessairement de dimension $n - p$.

- Montrons que $\text{Im}(\varphi) = \varphi(H)$.
  Par définition, $\text{Im}(\varphi) = \varphi(E)$. Comme $H \subset E$, l'inclusion $\varphi(H) \subset \varphi(E) = \text{Im}(\varphi)$ est claire.
  Montrons l'inclusion $\text{Im}(\varphi) \subset \varphi(H)$. Soit $y \in \text{Im}(\varphi)$. Par définition, il existe $x \in E$ tq $y = \varphi(x)$.
  Or, x se décompose dans $H \oplus \ker(\varphi)$:

$$x = \underbrace{x_H}_{\in H} + \underbrace{x_0}_{\in \ker(\varphi)}$$

  donc $y = \varphi(x) = \varphi(x_H) + \varphi(x_0) = \varphi(x_H) + 0 = \varphi(x_H)$.
  Cela montre que $y \in \varphi(H)$.
  La double inclusion est bien montrée.
- Montrons que $\dim(\varphi(H)) = \dim(H) = n - p$.
  On considère pour cela la restriction de φ à H :

$$\tilde{\varphi} : \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{pmatrix}$$

  de sorte que $\varphi(H) = \text{Im}(\tilde{\varphi})$.
  On va utiliser le lemme précédent (lemme 9) pour obtenir que la dimension de $\text{Im}(\tilde{\varphi})$ est la même que celle de l'espace de départ, c'est-à-dire $n - p$. Il nous faut pour cela montrer que $\tilde{\varphi}$ est injective.
  Soit $x \in \ker(\tilde{\varphi})$. Ce vecteur x appartient à la fois à H (par définition) et à $\ker(\varphi)$, car $\tilde{\varphi}(x) =$

$\varphi(x) = 0$.
Donc $x \in H \cap \ker(\varphi)$. Or, H et $\ker(\varphi)$ sont supplémentaires, donc en particulier $H \cap \ker(\varphi) = \{0_E\}$.
Donc $x = 0$.
Ce raisonnement mq $\ker(\tilde{\varphi}) = \{0_E\}$, et donc que $\tilde{\varphi}$ est injective. Le lemme 9 s'applique donc, et on a donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi})) = \dim(H) = n - p$$

Conclusion :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\varphi(H)) = \dim(\mathrm{Im}(\tilde{\varphi})) = n - p$$

---

dem des propriétés 11 : Fixons $\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E,F) \\ v \in \mathcal{L}(F,G) \end{array} \right.$ où E, F et G sont des ev de dimension finie.

1. $\mathrm{Im}(u) \subset F$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leqslant \dim(F)$. ok
2. Thm du rang :
$$\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u))$$
donc $\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim(E)$, avec égalité ssi $\dim(\ker(u)) = 0$, c-à-d $\ker(u) = \{0_E\}$, ce qui est équivalent à u injective. ok
3. Soit H un sev de E. On regarde la restriction $u|_H : \begin{pmatrix} H & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$
Le rang de $u|_H$ vaut $\dim(u(H))$. D'après 2), ce rang est inférieur à $\dim(H)$ (dimension de l'espace de départ). ok
D'autre part, si u est injective, alors $u|_H$ l'est aussi, et donc il y a égalité.
4. Par définition, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim[v(u(E))]$.
   — D'après 3), $\dim[v(u(E))] \leqslant \underbrace{\dim(u(E))}_{=\mathrm{rg}(u)}$, ce qui démontre $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(u)$. ok
   — $u(E) \subset F$, donc $v(u(E)) \subset v(F)$. Donc $\dim[v(u(E))] \leqslant \dim(v(F))$, ce qui signifie $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg}(v)$. ok
5. — Si u est un isomorphisme, alors en particulier u est surjective, donc $u(E) = F$.
Donc $\mathrm{rg}(v \circ u) = \dim[v(\underbrace{u(E)}_{F})] = \dim(v(F)) = \mathrm{rg}(v)$. ok
   — Si v est un isomorphisme, alors en particulier v est injective. Donc d'après 3) :
$\dim[v(u(E))] = \dim(u(E))$, ce qui signifie $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$. ok

---

dem des propriétés 12 :

1. On sait que la composée de deux bijections est une bijection, et que la composée de deux AL est une AL. ok
2. Par définition, $\varphi^{-1} : F \to E$ est bijective. Il reste à vérifier qu'elle est linéaire.
Fixons $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Posons $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi^{-1}(y_1) \\ x_2 = \varphi^{-1}(y_2) \end{array} \right.$ de sorte que $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \varphi(x_1) \\ y_2 = \varphi(x_2) \end{array} \right.$
On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \varphi^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) & = & \varphi^{-1}(\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2)) & \\ & = & \varphi^{-1}(\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) & \text{(linéarité de } \varphi) \\ & = & \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 & (\text{car } \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_E) \\ & = & \lambda_1 \varphi^{-1}(y_1) + \lambda_2 \varphi^{-1}(y_2) & \text{ok} \end{array}$$

---

dem des propriétés 13 : Par récurrence immédiate.

---

dem du théorème 14 :

- ▶ Montrons que 1) ⇒ 2)
  Supposons que φ est un isomorphisme. On note $n = \dim(E)$, et on considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrons que la famille $\mathcal{G} = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F.
  - Les e_i sont libres et φ est injective. Donc $\mathcal{G}$ est libre.
  - On sait que $\text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Im}(\varphi)$. Or, φ est surjective, donc $\text{Im}(\varphi) = F$. Donc $\mathcal{G}$ est génératrice de F.

  Finalement, $\mathcal{G}$ est bien une base de F.
- ▶ Pour 2) ⇒ 3), il n'y a rien à démontrer.
- ▶ Montrons que 3) ⇒ 1).
  Supposons qu'il existe une base de E : $(e_1, \dots, e_n)$ telle que la famille $\mathcal{G} = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F. Mq φ est un isomorphisme.
  - On sait que $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\mathcal{G})$. Or, $\mathcal{G}$ est génératrice de F (puisque c'est une base). Donc $\text{Im}(\varphi) = F$, et donc φ est surjective.
  - $\mathcal{G}$ est libre, donc comme elle comporte n vecteurs, $\text{Vect}(\mathcal{G})$ est de dimension n. Donc $\dim(\text{Im}\,\varphi) = n$, et donc par le théorème du rang, $\dim(\ker\varphi) = n - n = 0$. Donc $\ker(\varphi) = \{0_E\}$, ce qui prouve que φ est injective.

  Finalement, φ est bien bijective.

---

dem du corollaire 15 : Supposons qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$.
Si on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, (notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E), alors d'après le thm précédent, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F. Donc F est de dimension finie, et sa dimension est n.
Si on suppose que F est de dimension finie, on fait le même raisonnement avec φ^{-1}.

---

dem du théorème 16 : On suppose $\dim(E) = \dim(F) = n$ et on fixe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a par le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}\,\varphi) + \dim(\ker\varphi) = n$$

- ▶ Supposons φ injective. On a donc $\dim(\ker\varphi) = 0$, donc $\dim(\text{Im}\,\varphi) = n = \dim(F)$. Donc $\text{Im}(\varphi) = F$, ce qui signifie que φ est surjective.
- ▶ Supposons φ surjective. Alors $\dim(\text{Im}\,\varphi) = n$, et donc $\dim(\ker\varphi) = 0$. D'où $\ker(\varphi) = \{0_E\}$, ce qui prouve que φ est injective.

---

dem du corollaire 17 : notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}$. On est dans le contexte du théorème 16, donc les isomorphismes sont exactement les endomorphismes surjectifs, c'est-à-dire les endomorphismes de rang n.

1. Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = \text{Id}_E$. Comme Id_E est un isomorphisme, on a $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(\text{Id}_E) = n$, et par propriété du rang :

   $$\text{rg}(u) \geqslant \text{rg}(v \circ u) = n$$

   u est donc de rang maximal n, et est donc un isomorphisme.
   On peut alors revenir à $v \circ u = \text{Id}_E$ et composer à droite par u^{-1} pour obtenir : $v \circ u \circ u^{-1} = \text{Id}_E \circ u^{-1}$, d'où $v = u^{-1}$.
2. Supposons qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = \text{Id}_E$. En intervertissant les rôles de u et v dans la démonstration précédente, on obtient que v est un isomorphisme, et que $v^{-1} = u$. Cette dernière égalité prouve que u est lui-même un ismorphisme, et on a donc aussi $u^{-1} = (v^{-1})^{-1} = v$.

---

dem du théorème 18 : On se fixe $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$. Pour montrer l'existence et l'unicité de φ, on procède par analyse et synthèse.

— **Analyse.** Supposons qu'il existe une AL φ de E dans F telle qu'on ait $\varphi(e_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Tout $x \in E$ se décompose de façon unique $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$. On a :

$$\varphi(x) \;=\; \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) \;=\; \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Cela montre que la seule AL φ potentiellement solution du problème est l'application qui à $x \in E$ associe $\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

— **Synthèse.** Si on pose $\varphi : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$, alors :
— φ est linéaire (simple vérification).
— $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_k) = y_k$.
En effet, les coordonnées de e_k dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^{\text{ème}}}, 0 \dots, 0)$.

Conclusion : la synthèse assure l'existence de φ, et l'analyse son unicité.

---

dem du théorème 19 : Pour montrer l'existence et l'unicité de φ, on procède par analyse et synthèse.

— **Analyse.** Tout $x \in E$ se décompose de façon unique $x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$. Si φ existe, alors on a :

$$\varphi(x) \;=\; \varphi(x_1 + x_2) \;=\; \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \;=\; \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$$

Cela montre que la seule AL φ potentiellement solution du problème est l'AL qui à un $x \in E$ associe $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$, où x_1 et x_2 sont les composantes de x selon E_1 et E_2.

— **Synthèse.** Si on pose $\varphi : \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) \end{pmatrix}$, alors :
— φ est linéaire (simple vérification).
— si $x \in E_1$ (c-à-d $x = x_1$ et $x_2 = 0$) alors $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. Donc $\varphi|_{E_1} = \varphi_1$.
— si $x \in E_2$ (c-à-d $x = x_2$ et $x_1 = 0$) alors $\varphi(x) = \varphi_2(x)$. Donc $\varphi|_{E_2} = \varphi_2$.

Conclusion : la synthèse assure l'existence de φ, et l'analyse son unicité.

---

dem du théorème-définition 20 : Tout d'abord, d'après le théorème 19, p est bien définie.

- Montrons $p \circ p = p$. Soit $x = x_F + x_G$ un élément de E. On a $p(x) = x_F$ donc $p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x)$. ok
- Montrons $\ker(p) = G$. Si $x = x_F + x_G$, on procède par équivalences :

$$x \in \ker(p) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_G \quad \Leftrightarrow \quad x \in G \qquad \text{ok}$$

- Montrons $\text{Im}(p) = F$. D'une part, $\forall x \in E$, $p(x) \in F$. Cela montre que $\text{Im}(p) \subset F$. D'autre part, si $x \in F$, alors $x = p(x)$ donc $x \in \text{Im}(p)$. Cela montre que $F \subset \text{Im}(p)$. ok
- Montrons $F = \ker(p - \text{Id}_E)$. Si $x = x_F + x_G$, on procède par équivalences :

$$x \in \ker(p - \text{Id}_E) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_F \quad \Leftrightarrow \quad x \in F \qquad \text{ok}$$

---

dem du théorème 21 : L'implication ($\Rightarrow$) est démontrée dans le thm précédent. Reste à montrer ($\Leftarrow$).
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Mq φ est un projecteur.
On pose $\left| \begin{array}{l} F := \ker(\varphi - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid \varphi(x) = x\} \\ G := \ker(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} \end{array} \right.$
Par définition, $\varphi|_F = \text{Id}_F$ et $\varphi|_G = 0$. Reste à mq $F \oplus G = E$.

— Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Si $x \in F \cap G$, alors $\begin{cases} \varphi(x) = x \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$ et donc $x = 0$ ok

— Montrons que $F + G = E$. Soit $x \in E$. On écrit :

$$x = \underbrace{x - \varphi(x)}_{a} + \underbrace{\varphi(x)}_{b}$$

et on a $\begin{cases} a \in G \text{ car } \varphi(a) = \varphi(x) - \varphi \circ \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 \\ b \in F \text{ car } \varphi(b) = \varphi \circ \varphi(x) = \varphi(x) = b \end{cases}$
Donc $x \in F + G$. ok

---

dem du théorème-définition 22 : Tout d'abord, d'après le théorème 19, s est bien définie.

▶ Montrons $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. Soit $x = x_F + x_G$ un élément de E. On a $s(x) = x_F - x_G$ donc $s(s(x)) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$. ok

▶ Montrons $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = F$. Si $x = x_F + x_G$, on procède par équivalences :

$$x \in \ker(s - \mathrm{Id}_E) \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x_F - x_G = x_F + x_G \quad \Leftrightarrow \quad x_G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in F \qquad \text{ok}$$

▶ Montrons $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = G$. Si $x = x_F + x_G$, on procède par équivalences :

$$x \in \ker(s + \mathrm{Id}_E) \quad \Leftrightarrow \quad s(x) = -x \quad \Leftrightarrow \quad x_F - x_G = -x_F - x_G \quad \Leftrightarrow \quad x_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in G \qquad \text{ok}$$

---

dem du théorème 23 : L'implication ($\Rightarrow$) est démontrée dans le thm précédent. Reste à montrer ($\Leftarrow$).
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$. Mq φ est une symétrie.
On pose $\left| \begin{array}{l} F := \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid \varphi(x) = x\} \\ G := \ker(\varphi + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid \varphi(x) = -x\} \end{array} \right.$
Par définition, $\varphi|_F = \mathrm{Id}_F$ et $\varphi|_G = -\mathrm{Id}_G$. Reste à mq $F \oplus G = E$.

— Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap G$.
On a $\begin{cases} \varphi(x) = x \\ \varphi(x) = -x \end{cases}$, donc $x = -x$ et donc $x = 0_E$. ok

— Montrons que $F + G = E$. Soit $x \in E$. On écrit :

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x - \varphi(x))}_{a} + \underbrace{\frac{1}{2}(x + \varphi(x))}_{b}$$

et on a $\begin{cases} a \in G \text{ car } \varphi(a) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi \circ \varphi(x)) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - x) = -a \\ b \in F \text{ car } \varphi(b) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi \circ \varphi(x)) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + x) = b \end{cases}$
Donc $x \in F + G$. ok

---

dem de la propriété 24 : Soit D une droite vectorielle non incluse dans H.
On a déjà $\dim(H) + \dim(D) = n - 1 + 1 = n = \dim(E)$. Il suffit donc de montrer que $H \cap D = \{0\}$.
Soit $x \in H \cap D$, supposons par l'absurde que $x \neq 0$,
on a alors x est un vecteur non nul de D donc $D = \mathrm{Vect}(x)$,
de plus x est un vecteur de H donc $\mathrm{Vect}(x) \subset H$ donc $D \subset H$. **Contradiction**.

---

dem de la propriété 25 : Commençons par remarquer que l'image d'une forme linéaire est un sev de $\mathbb{K}$, c'est donc $\{0\}$ (φ est alors nulle) ou $\mathbb{K}$ (φ est alors surjective).
Soit H un sous-espace vectoriel de E.
($\Leftarrow$) Supposons que H soit le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\ker \varphi) + \mathrm{rg}(\varphi) = n.$$

Or φ étant une forme linéaire non nulle, on a $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{K}$, donc $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$. On en déduit que $\dim(H) = n-1$, i.e. H est un hyperplan de E.
($\Rightarrow$) Supposons que H soit un hyperplan de E. Donnons-nous un vecteur $x \in E \setminus H$ et notons $D = \operatorname{Vect}(x)$. D'après la proposition précédente, H et D sont supplémentaires dans E.
Considérons alors la forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ définie par ses restrictions à H et D (voir théorème 19) :

$$\varphi|_H = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi|_D = \psi,$$

où $\psi \in \mathcal{L}(D, \mathbb{K})$ est définie par son comportement sur la base (x) de D : $\psi(x) = 1$.
On justifie alors que $H = \ker\varphi$, en effet :
▶ par construction de φ, $H \subset \ker\varphi$;
▶ la forme linéaire φ étant non nulle, on a $\operatorname{rg}\varphi = 1$, donc $\dim\ker\varphi = n - 1 = \dim(H)$.

---

dem de la propriété 26 :
• Supposons que H soit un hyperplan de E. Il existe alors une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \ker\varphi$. Soit $x \in E$, que l'on écrit dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, par linéarité de φ, on a :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i).$$

Ainsi, en notant $\lambda_i = \varphi(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$x \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Cela donne le résultat car, φ étant non nulle, les $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont non tous nuls.
• Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des scalaires non tous nuls tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \left(x \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0\right).$$

En considérant la forme linéaire φ définie par l'image de la base $\mathcal{B}$ de la manière suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \varphi(e_i) = \lambda_i$$

on constate, par linéarité de φ, que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \varphi(x)$, et donc on a $x \in H \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$, autrement dit $H = \ker\varphi$. Puisque φ est non nulle (car les λ_i sont non tous nuls), on en déduit par la proposition précédente que H est un hyperplan de E.